Решение задачи линейного программирования графическим методом

Задача 1. Найти максимум целевой функции L =-x+2y при следующих ограничениях:



Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):

ДУ: Найти минимум целевой функции L=3x+y при тех же ограничениях.

Решение:

Решим неравенство графическим способом. Введем на плоскости прямоугольную систему координат, в которой точки с координатами находятся в первом квадранте этой координатной плоскости.

Графическое решение неравенства типа определяет одну из полуплоскостей, на которые прямая делит координатную плоскость. Решением неравенства будет та полуплоскость все точки которой будут ему удовлетворять.

Исходя из этого, рассмотрим каждое, из приведенной выше системы, неравенство. Решением каждого из них будет соответствующая ему полуплоскость, а решением системы будет область, образованная пересечением всех найденных полуплоскостей.

1) **Строим область допустимых решений или допустимых планов.** Графическое решение нашей системы приведено на рисунке 1.

Здесь прямая (1), соответствует уравнению . Построена она по двум точкам () и () и точка О(2,1), удовлетворяющая нашему первому неравенству , определяет в качестве решения полуплоскость ,лежащую ниже прямой (1). Аналогично решением второго неравенства  является полуплоскость, лежащая ниже прямой (2), соответствующей уравнению, решением третьего неравенства является полуплоскость , находящаяся слева от прямой (3) - 6, а решением четвертого, полуплоскость выше прямой (4)- .Решением же системы является в нашем случае область АВСД , которая была образована пересечением четырех, выше найденных полуплоскостей. Область АВСД образует область допустимых решений или допустимых планов нашей задачи, в которой мы и будем искать оптимальное решение L=max.

2) **Построим вектор = grad L(x,y)**=(-1;2), который укажет направление **наибольшего возрастания целевой функции**. Вектор укажет на одну из угловых точек, в нашем случае на точку В.

Рисунок 1.

Y

6

5

4

3

2

n

1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 X

1. 1 Lmax

2

max

B

C

A D

Линии, перпендикулярные этому вектору - L(x,y)=const, которые называются линиями уровня, задают одно из возможных значений целевой функции. На графике одно из этих уравнений, например L=-x+2y=6, задает прямую, которой соответствует значение L=6. Максимальное же значение целевой функции будет соответствовать, такой линии уровня, которая будет получена путем параллельного переноса одной из линий уровня, проходящей через область допустимых планов АВСД, в пограничную область АВСД в направлении вектора =(-1,2)=grad L.

3) **Максимум целевой функции** достигается в точке В, которая является точкой пересечения прямых 1 и 2. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:



получим координаты точки В=(4,4) и Lmax=-4+2x4=4.

**Аналогично будем искать минимум целевой функции L=3x+у.**

Для этого построим вектор =grad L=(3,1) и одну из линий уровня L, имеющую уравнение 3x+y=6 (см. рисунок 2).

Рисунок 2

Y 3 1

6 2

5

B

4

Lmin C

3

2

min A D 4

1

n

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 X

Далее будем параллельно перемещать ее в направлении, противоположном направлению вектора (3,1) до границы области допустимых планов АВСД. Последней точкой этой области, через которую проходит наша прямая L и в которой она достигает своего минимального значения будет точка А. Эта точка является пересечением прямых 1 и 3. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:



получим координаты этой точки А=(1,1) и Lmin=3x1+1=4.